

Алгебра и теория чисел :: занятие 11 (04.05.2010)

День 1 (04.05.2010)

Задачи 1. Задачи про простые числа

- A. primepi Число простых чисел
- B. primeset Простые разбиения

Лекция 1. (Теория) Аналитическая теория чисел

1. Факты из математического анализа

- a. Оценка ряда $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ с помощью $\int_1^n f(x)dx$ для монотонных функций
 - b. Теорема о $\sum_{n \leq x} \ln n = x \ln x - x + O(\ln x)$
 - c. Теорема о $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n \ln n} = \ln \ln x + c + o(1)$
 - d. Формула Тейлора
 - e. Теорема о $\frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{n \ln^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- ##### 2. Теорема Чебышёва
- a. Функция $\theta(n) = \sum_{p \leq n} \log p$, теорема о $\theta(n) = O(n)$
 - b. Теорема о $\sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} = \log n + O(1)$
 - c. Существование констант c_1 и c_2 , таких что $c_1 n < \theta(x) < c_2 n$
 - d. Существование констант c_1 и c_2 , таких что $c_1 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\log x}$
- ##### 3. Постулат Бертрана
- a. Теорема о $C_{2n}^n > \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$
 - b. Теорема о $\prod_{p \leq n} p < 4^n$
 - c. Теорема о $\pi(2n) - \pi(n) \geq 1$
 - d. Теорема Финслера о $\frac{n}{3 \log 2n} < \pi(2n) - \pi(n) < \frac{7n}{5 \log n}$ при $n > 1$
- ##### 4. Уточнение констант в теореме Чебышёва
- a. * Теорема о $\pi(x) > \frac{2}{3} \frac{x}{\log x}$ при $x > 3$
 - b. * Теорема о $\pi(x) < \frac{8}{5} \frac{x}{\log x}$ при $x > 3$
- ##### 5. Сумма обратных к простым
- a. Преобразование Абеля для $\sum_{i=1}^n a_i b_i$
 - b. Теорема о $\sum \frac{1}{p} = \log \log p + c + o(1)$
- ##### 6. Асимптотический закон распределения простых чисел
- a. Теорема о $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ (без док-ва)
 - b. * Теорема о $p_n \sim n \ln n$
 - c. * Теорема о $n \ln n < p_n < n(\ln n + (1 + o(1)) \ln \ln n)$ (без док-ва)

Лекция 2. (Практика) Вычисление $\pi(x)$

- 1. Алгоритм вычисления $\pi(x)$