Теоретические задачи по курсу «Алгебра и теория чисел»

Теория групп

Порядок группы — число элементов в группе.

1. Найти количество способов покрасить грани куба в n цветов. Два способа покраски считаются одинаковыми, если один можно перевести в другой посредством вращения куба
2. Доказать, что конечная группа простого порядка циклическая (следовательно, абелева).
3. Рассмотрим группу, в которой порядок каждого элемента равен двум (для любого $a \in G$ выполнено $a^2 = e$). Доказать, что эта группа — абелева.
4. Найти все группы подрядка не превосходящего пяти. Выписать явно их таблицы умножения.
5. Найти все группы подрядка шесть. Выписать явно их таблицы умножения.
6. Доказать, что группа рациональных чисел относительно операции сложения не является конечно порожденной.
7. Доказать, что свободная группа $F = \langle a, b \rangle$ неабелева.

Группа $G = \langle a, b \mid aba = b, bab = a \rangle$

1. Доказать, что $a^2 = b^2$.
2. Доказать, что $a^4 = b^4 = e$.
3. Доказать, что $|G| = 8$ и выписать явно таблицу умножения.
4. Рассмотрим $x = a^2 = b^2$ и подгруппу $H = \{e, x\}$. Доказать что $H \lhd G$.
5. Выписать явно таблицу умножения группы G/H.

Кольца

1. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ и норму $N(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3b^2$ при $a, b \in \mathbb{Q}$. Доказать что $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$.
2. Доказать, что в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ теорема о единственности разложения на множители не верна (привести пример).
3. Пусть $\zeta = a + b\sqrt{-3}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$. Доказать, что существует $\alpha \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ такое, что $N(\zeta - \alpha) < 1$.
4. Доказать евклидовость кольца $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$.

Разные задачи

1. (Лемма Гаусса) *Содержание* $cont(f)$ полинома $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — наибольший общий делитель всех его коэффициентов. Доказать, что $cont(fg) = cont(f) \cdot cont(g)$.
2. (Критерий Эйзенштейна) Пусть $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$. Известно, что существует простое число p такое, что a_n не делится на p, a_{n-1}, …, a_0 делятся на p, a_0 не делится на p^2. Доказать, что $f(x)$ — неприводим (не имеет собственных делителей).
3. Пусть p — простое число. Доказать, что $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.
4. Изучить группу $G = \langle a, b \mid a^3 = e, b^2 = e, (ab)^2 = e \rangle$. Найти количество элементов и выписать явно таблицу умножения.
5. Доказать, что в конечном кольце без делителей нуля все ненулевые элементы обратимы.

Численные задачи

1. Найти наибольший общий делитель полиномов $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$ и $g(x) = 3x^2 + x + 2$ и его представление в виде их линейной комбинации в поле $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
2. Найти полином $f(x)$ такой, что $f(x) \equiv 2 \pmod{x - 1}$, $f(x) \equiv x \pmod{x^2 + x + 1}$ и $f(x) \equiv x^2 \pmod{x^2 - x + 1}$ в поле $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
3. Найти полином наименьшей степени $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ корнем которого является число α.
   a) $\alpha = 1 + \sqrt{2}$
   b) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$
   c) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$
   d) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$