Теоретические задачи по курсу «Алгоритмы алгебры и теории чисел»

Разные задачи

1. Доказать, что $p_n + p_{n+1} > p_{n+2}$ для $n > 1$, где p_n — n-ое простое число.
2. Пусть p_n — n-ое простое число. Доказать, что $p_n \sim n \ln n$ пользуясь тем, что $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$.
3. Доказать, что $\prod\limits_{2<p\le x} (1 - \frac{2}{p}) = \frac{c+o(1)}{\ln^2 x}$ для некоторой константы c.
4. Пусть $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $0 < A < \frac{1}{\sqrt{5}}$.
   a) Доказать, что если $|\alpha - \frac{n}{m}| < \frac{A}{m^2}$, то существует k такое, что $n = F_{k+1}$, $m = F_k$ (соседние числа Фибоначчи).
   b) Доказать, что существует конечное число n и m для которых $|\alpha - \frac{n}{m}| < \frac{A}{m^2}$.

Цепная дробь для e

Пусть $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!(2n+2k)!} x^k$, $b_n = f_n(\frac{1}{4})$.

1. Доказать, что ряд для $f_n(x)$ сходится абсолютно при всех $x \in \mathbb{R}$.
2. Доказать, что $4x f'_{n+1}(x) + (4n+2) f_{n+1}(x) = f_n(x)$.
3. Доказать, что $b_n = (4n+2) b_{n+1} + b_{n+2}$.
4. Доказать, что $\frac{e+1}{e-1} = \langle 2, 6, 10, 14, 18, \ldots \rangle$.
5. Пусть $\alpha = \langle 2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots \rangle$.
   Обозначим её подходящие дроби как $\frac{p_n}{q_n}$, а подходящие дроби $\frac{e+1}{e-1}$ как $\frac{r_n}{s_n}$.
   Доказать, что $r_n = (p_{3n+1} + q_{3n+1})/2$, $s_n = (p_{3n+1} - q_{3n+1})/2$.
6. Доказать, что $\alpha = e$.

Теорема Лиувилля

1. Пусть $\alpha \notin \mathbb{Q}$ — корень полинома $p(x) \in \mathbb{Z}$ степени n. Доказать, что существует положительное $A \in \mathbb{R}$ такое, что для любых $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ выполнено неравенство $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{A}{q^n}$.
2. *Число Лиувилля* — это число $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что для любого натурального n существуют целые числа p и q ($q > 1$), для которых выполнено неравенство $0 < |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$. Доказать, что если α — число Лиувилля, то $\alpha \notin \mathbb{Q}$.
3. *Трансцедентное число* — число, не являющееся корнем никакого полинома с целыми коэффициентами степени не меньше один. Доказать, что любое число Лиувилля является трансцедентным.
4. Доказать, что число $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 10^{-i!}$ является трансцедентым.

Конечные поля

Будем говорить, что поле K является *конечным расширением степени n поля F* и обозначать $[K : F] = n$, если $K \supset F$ и размерность поля K как векторного пространства над полем F равна n.

1. Пусть F — конечное поле из q элементов, а K — конечное расширение поля F степени n, причем $q \equiv 1 \pmod{n}$. Доказать, что для любого ненулевого $\alpha \in F$ уравнение $x^n = \alpha$ имеет ровно n решений в K.
2. Пусть $K \supset F$ — конечные поля, причем $[K : F] = 3$. Доказать, что если $\alpha \in F$ — не квадрат в F, то α не квадрат и в K.
3. Пусть K — конечное поле из p^n элементов (p — простое число) и $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ — неприводимый полином степени n над полем $\mathbb{Z}_p$. Доказать, что $f(x)$ имеет n различных корней в поле K.
4. Пусть F — поле из p^n элеметов (p — простое число). Для $\alpha \in F$ положим $f(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^p) \ldots (x - \alpha^{p^{n-1}})$. Доказать, что $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$.

Численные задачи

1. Вычислить $\pi(1000)$.
2. Вычислить цепную дробь (найти период и предпериод) чисел $\sqrt{17}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$.